

# OPŠTE KARAKTERISTIKE MERNIH SISTEMA



measurement with confidence



Dr. Ličen Hotimir  
[trcpro@neobee.net](mailto:trcpro@neobee.net)

[www.hbm.com](http://www.hbm.com)

# ISTRAŽIVANJE U NAUCI I TEHNICI:

- **TEORIJSKO**
- **EKSPERIMENTALNO**

## Teorijski prilaz problemu:

- Daje rezultate uopštene primenljivosti.
- Svaki proračun je toliko dobar koliko su dobri podaci na osnovu kojih je proračun izveden, tj. **model i polazni podaci**.
- Tačan i pouzdan proračun iziskuje kod kompleksnih problema veoma složene računске operacije koje je bez pomoći savremenih računarskih mašina nemoguće izvesti.
- Za teorijske analize potreban je samo papir, olovka i kalkulator. Skupocena i razučena laboratorijska oprema nije potrebna, što znatno utiče na troškove.
- Rezultati se relativno brzo dobijaju, tj. nema vremenskog kašnjenja koje je često prisutno kod eksperimentalnog rada.

## **Eksperimentalni prilaz problemu:**

- Daje rezultate koji se odnose uvek samo na specifičan sistem i uslove ispitivanja.
- Nije potrebna nikakva aproksimacija, rezultati odražavaju pravo stanje i realan sistem koji se ispituje.
- Potrebno je duže vreme da bi se došlo do eksperimentalnih rezultata i shodno tome su relativno visoki troškovi.
- Neophodna je razuđena i savremena eksperimentalna oprema

## **Fundamentalna istraživanja**

Fundamentalna istraživanja su vezana za izučavanje fenomena određene pojave, tj. fizikalnih zakonitosti unutar određene pojave. Razlog za ovu vrstu istraživanja je obično želja za sticanjem novih saznanja o toj pojavi, najčešće nezavisno od potreba razvoja nekog novog produkta.

## **Primenjena istraživanja**

Za potrebe određenog produkta i mogu biti podstaknuta raznim razlozima u pojedinim fazama razvoja određenog produkta i to:

- **Razvojna istraživanja**

Istraživanja vezana pre svega na ispitivanje pojedinih parametara i njihovog uticaja na konstruktivno oblikovanje produkta (probni stolovi).

- **Prototipska istraživanja**

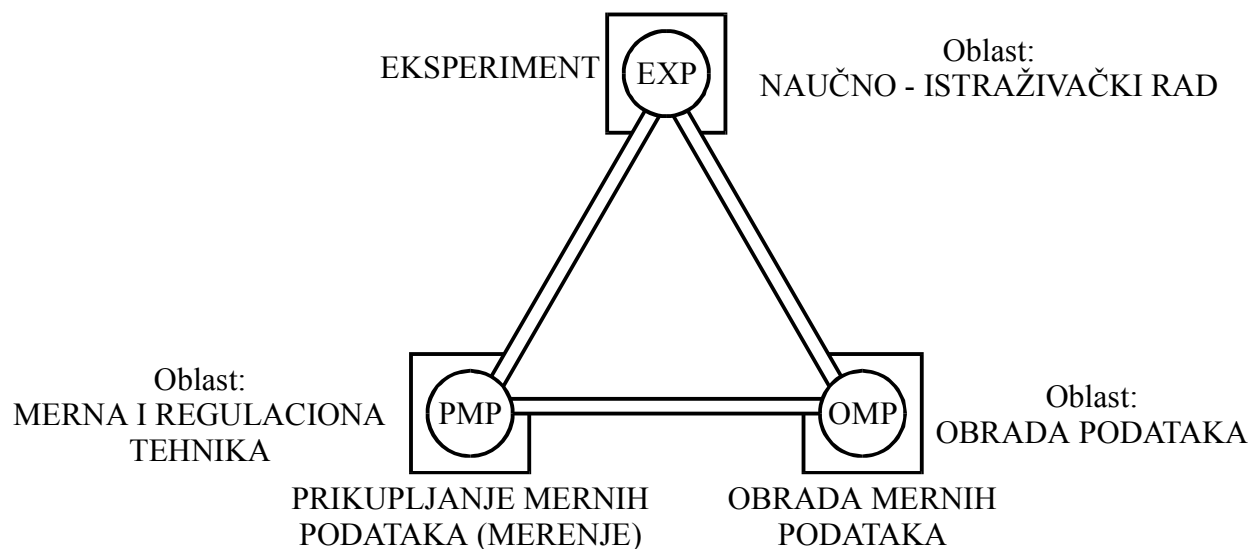
Provera funkcionalnosti sistema kao i ispitivanja vezana za proveru karakteristika i postavljenih zahteva

- **Eksploaciona istraživanja**

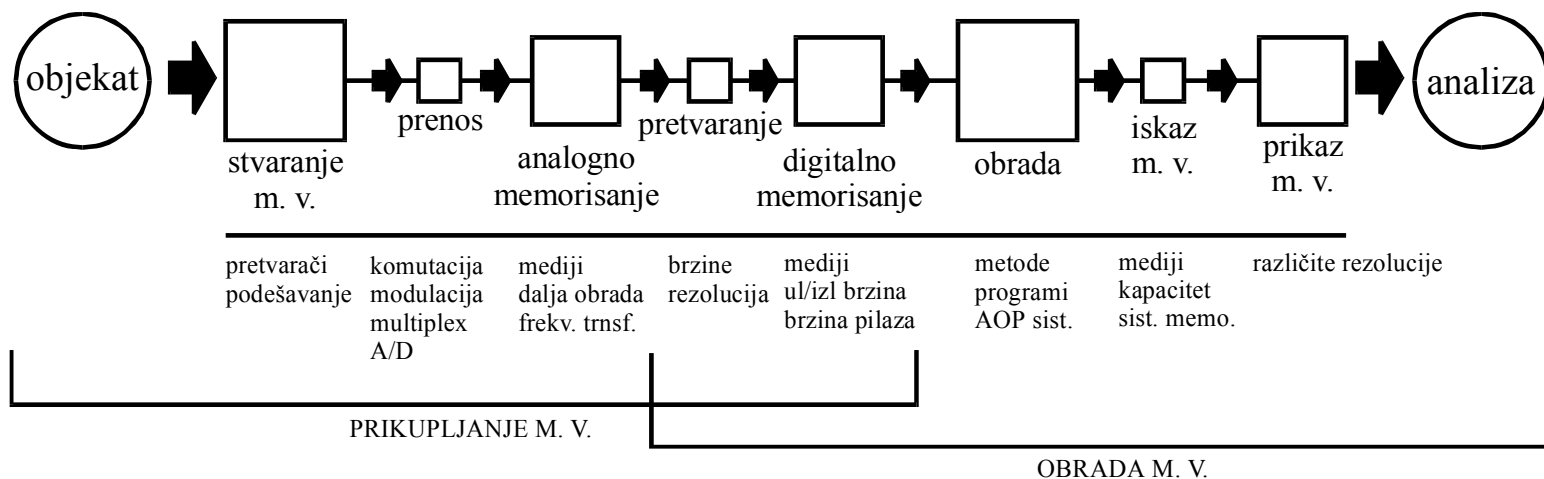
Ispitivanja eksploacionih karakteristika sistema u cilju:

- dobijanja informacija neophodnih za projektovanje novih sistema ili optimizaciju postojećih,
- otklanjanje nekih nedostataka sistema koji se javljaju u eksploataciji.

## Uloga i značaj eksperimentalnih istraživanja



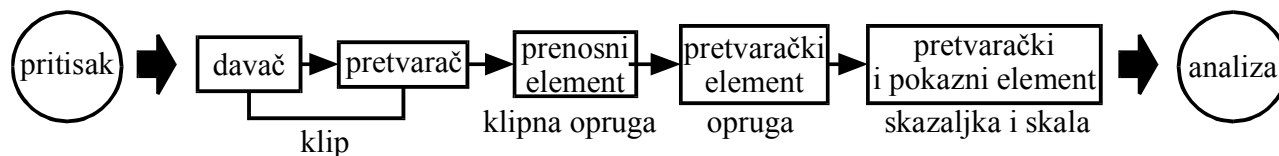
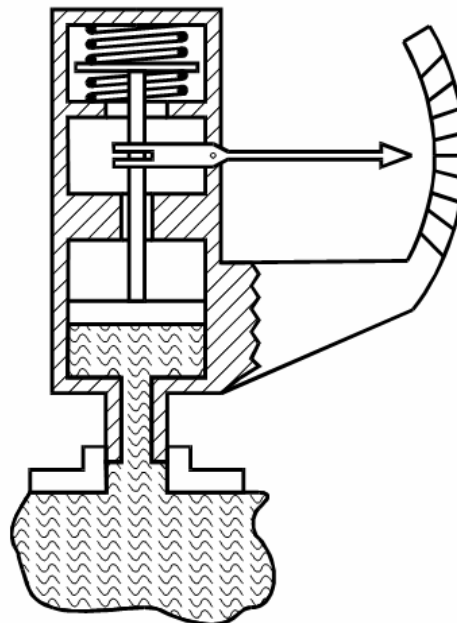
## PRIKUPLANJE MERNIH VELIČINA - MERENJE



### Merni lanac

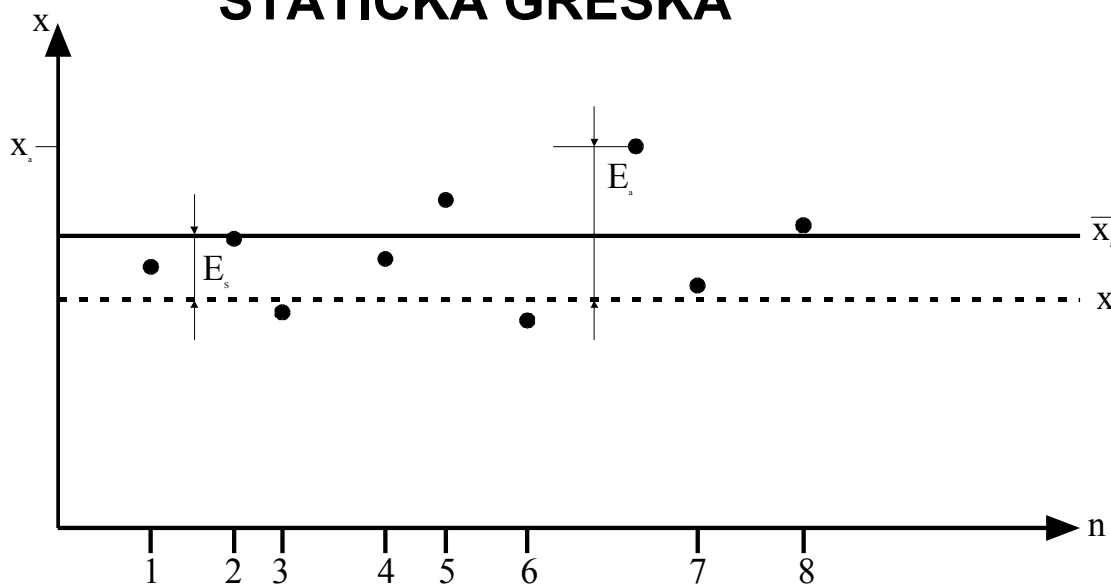


## MERNI LANAC PRI MERENJU PRITISKA



## STATIČKE KARAKTERISTIKE MERNOG SISTEMA

### STATIČKA GREŠKA



$\bar{x}$  - očitana vrednost  
 $x$  - "stvarna" vrednost  
 $E_s$  - sistematska greška  
 $E_a$  - slučajna greška

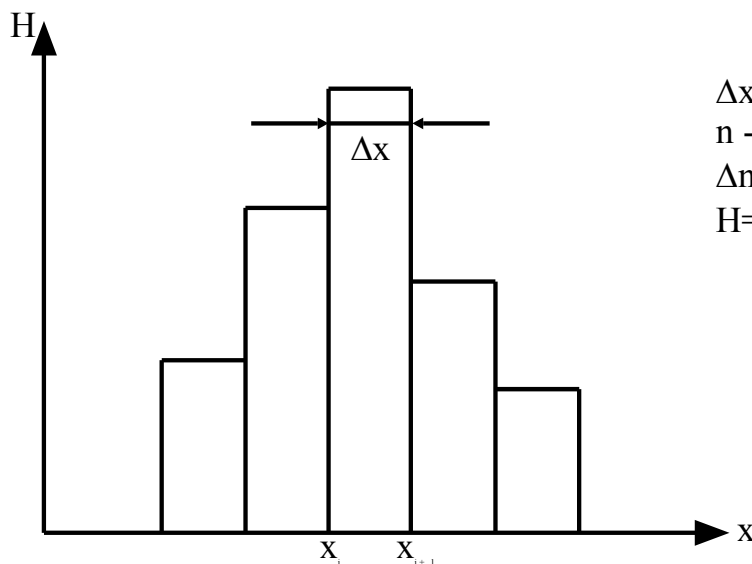
**Sistematska greška  $E_s$**

**Slučajna greška  $E_a$**

$$E = E_s + E_a = x_a - x$$

Relativna greška:  $\varepsilon = \frac{E}{x} = \frac{E}{x_a} \cdot 100\%$

## SLUČAJNA GREŠKA: Histogram



$\Delta x$  - širina klase

$n$  - ukupan broj svih očitanih veličina

$\Delta n$  - broj očitanih veličina u intervalu  $\Delta x$

$H = \frac{\Delta n}{\Delta x}$  - učestanost veličina u intervalu  $\Delta x$   
(apsolutna učestalost)

$$h = \frac{H}{n} = \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x}$$

$$\sum h \cdot \Delta x = \sum \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x} \cdot \Delta x = \frac{\sum \Delta n}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Ako:

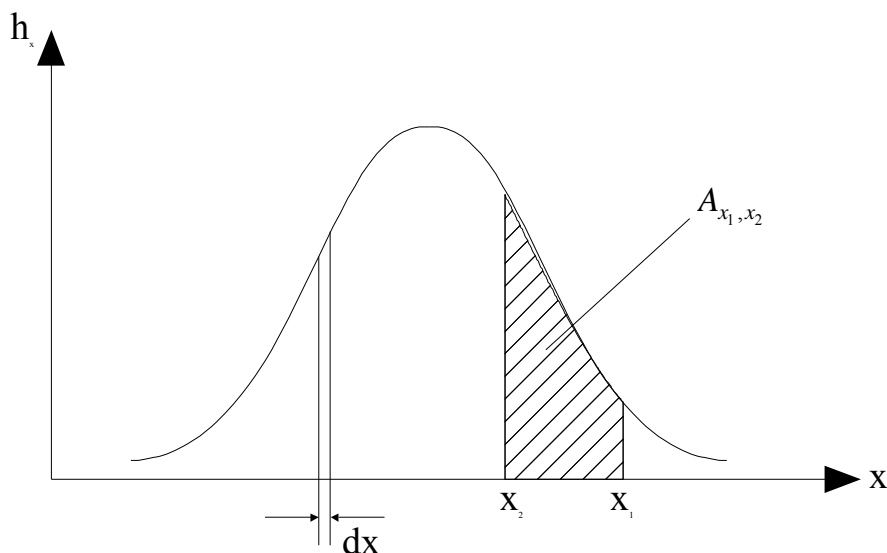
$$\begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow dx \\ \Delta n \rightarrow dn \end{array}$$

važi:

$$h_x = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta n \rightarrow 0}} \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dx}$$

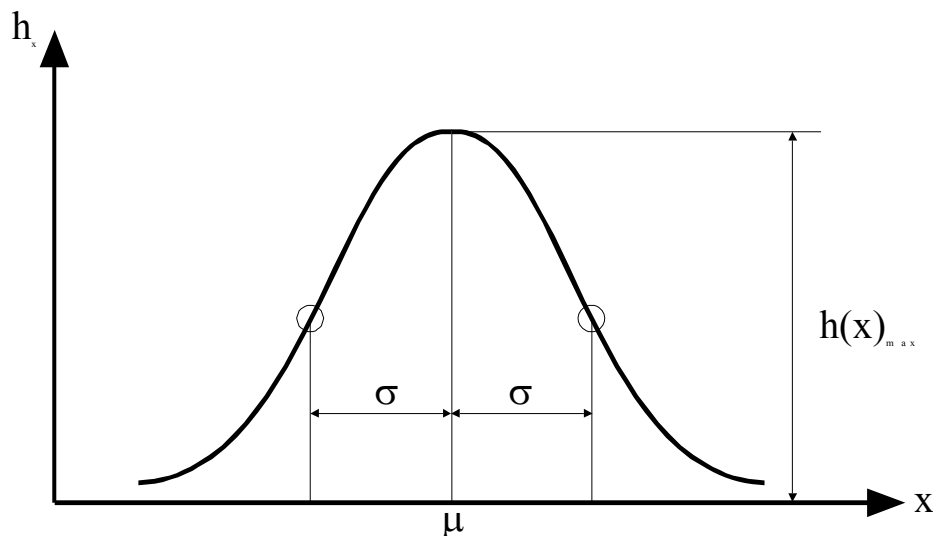
## DISTRIBUCIJA FREKVENCije $h_x=f(x)$ ,

Predstavlja verovatnoću da neka imerena vrednost lezi između  $x_1$  i  $x_2$



$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} h_x dx = \frac{1}{n} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dn}{dx} dx = \left| \frac{\Delta n}{n} \right|_{x_1}^{x_2} = A_{x_1, x_2}$$

## KARAKTERISTIKE GAUSS-OVE DISTRIBUCIJE



$$h_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

za svako  $x$ :  $-\infty < x < +\infty$

- **Određivanje maksimuma funkcije**  $\left(\frac{dh}{dx} = 0\right)$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot 2(x-\mu) \frac{1}{2\sigma^2} = 0 \Rightarrow x = \mu$$

- Rešenja funkcije za vrednosti  $h_x=0$ :

$$x_{1,2} = \pm\infty \rightarrow \text{horizontalne asimptote}$$

- **Maksimalna vrednost:**  $h_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0.4}{\sigma}$  za  $x=\mu$ ,  $\mu$  je srednja vrednost i istovremeno najučestanija vrednost.

- **Određivanje prevojnih tačaka**  $\left(\frac{d^2h}{dx^2}\right) = 0$

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right) = 0$$

$$\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} = 0$$

$$(x-\mu) = \pm\sigma \Rightarrow x = \mu \pm \sigma$$

## DISTRIBUCIJA FREKVENCije je:

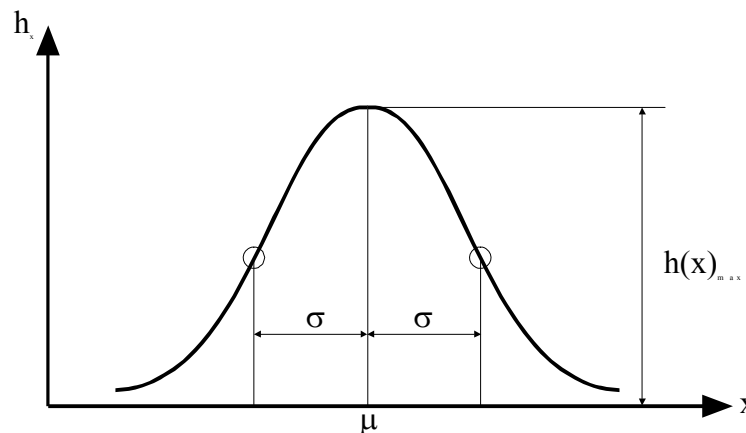
- Definisana sa dva parametra:
  - $\mu$  (srednja vrednost) |
  - $\sigma$  (standardno odstupanje)

Aritmetička srednja vrednost:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

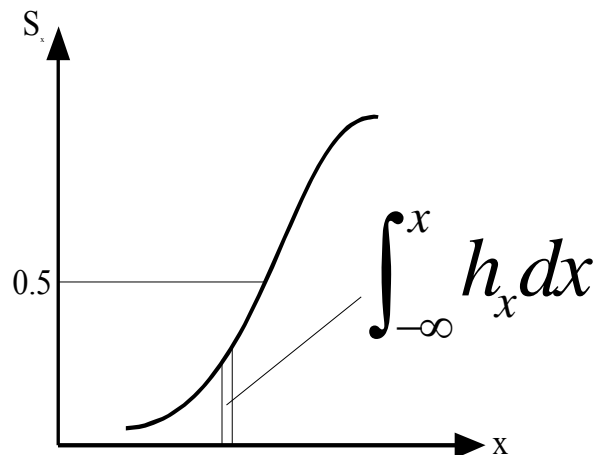
Standardno odstupanje:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

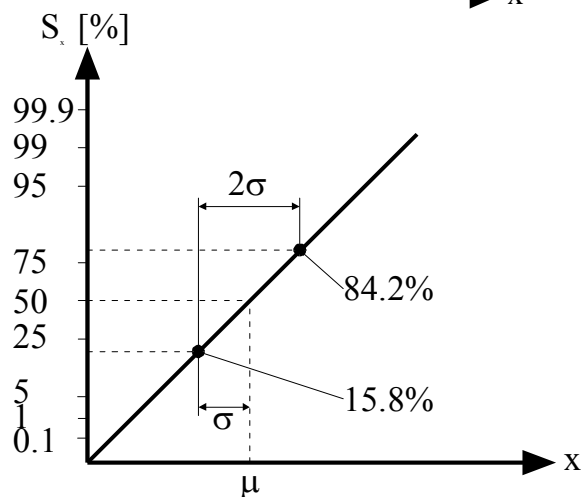


## KUMULATIVNA DISTRIBUCIJA FREKVENCije

- predstavlja verovatnoću da je neka vrednost manja ili jednaka definisanoj vrednosti



$$S_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = \int_{-\infty}^x h_x \cdot dx$$



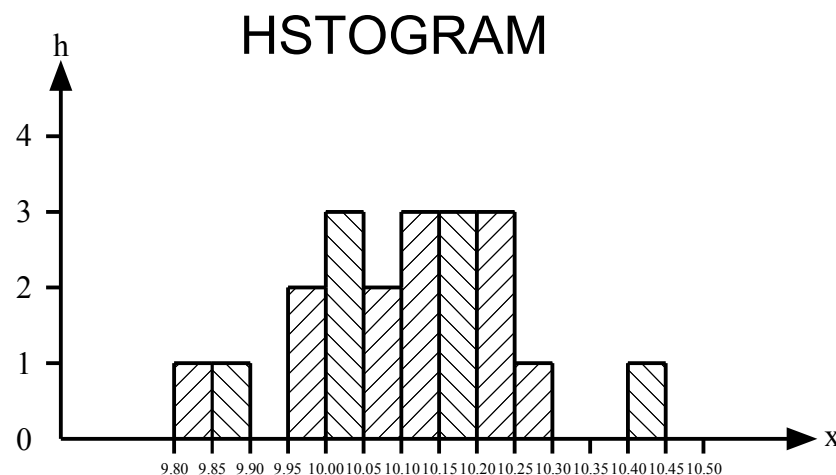
**Kod idealne Gausove distribucije možemo pokazati da:**

- 68% očitavanja leže unutar  $\pm\sigma$**
- 95% očitavanja leže unutar  $\pm 2\sigma$**
- 99.7% očitavanja leže unutar  $\pm 3\sigma$**



## PRIMER: Merenje pritiska....20 merenja

Broj očitavanja $i$	Vrednost očitavanja [bar]	Broj očitavanja $i$	Vrednost očitavanja [bar]
1	10.02	11	10.05
2	10.20	12	10.17
3	10.26	13	10.42
4	10.20	14	10.21
5	10.22	15	10.23
6	10.13	16	10.11
7	9.97	17	9.98
8	10.12	18	10.10
9	10.09	19	10.04
10	9.90	20	9.81



Srednjavrednost:  $\mu \cong \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = 10.11$

*Statistička procena*

Standardno odstupanje:

*Statistička procena*

$$\sigma \cong s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0.14$$

Procena bliskosti između statističke procene i stvarne veličine:

- održujemo standardno odstupanje za srednju vrednost

$$s_x^- = \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

$s$  - *statistička procena* za standardno odstupanje  
 $N$  – broj merenja

- da bi se greška smanjila potrebno je sa kvadratom povećati broj merenja (uzoraka)

Za naših 20 merenja važi:  $s_x^- = \frac{\pm 0.28}{\sqrt{19}} = \pm 0.064$  bara

Pa kažemo da postoji verovatnoća od 95% ( $2\sigma$ ) da  $\bar{x}$  (*procena*) ne odstupa od  $\mu$  (*stvarna vrednost*) za više od  $\pm 0.064$  bar

## SISTEMATSKA GREŠKA:

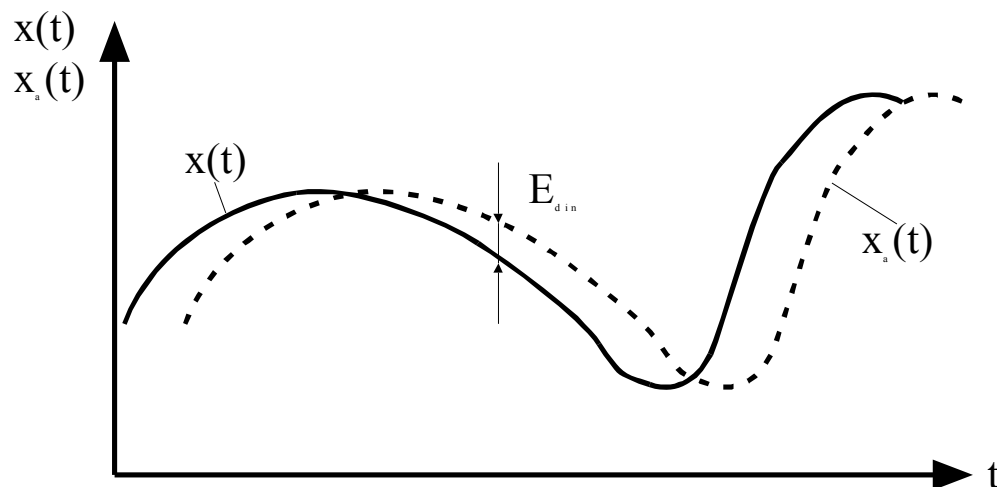
Posledica mernog sistema > KALIBRACIJA



Matematička interpolacija: **METODA NAJMANJIH KVADRATA**

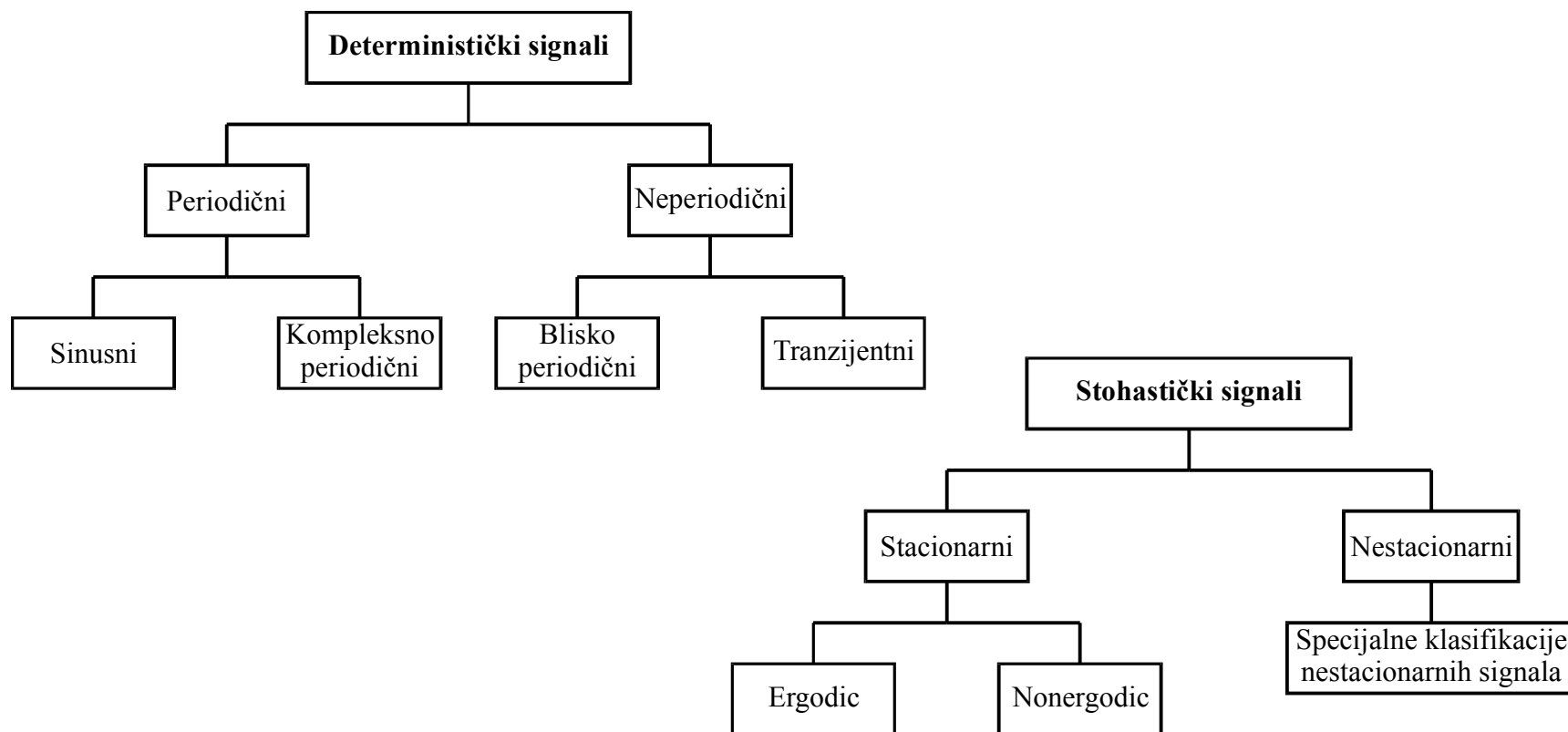
Definisanje **KLASE TAČNOSTI** mernog sistema, kao maksimalne procentualne greške u odnosu na nominalnu vrednost

## DINAMIČKE KARAKTERISTIKE MERNOG SISTEMA DINAMIČKA GREŠKA



$E_{din} = x_a - x$  - dinamička greška  
 $x_a$  - izmerena veličina  
 $x$  - stvarna veličina

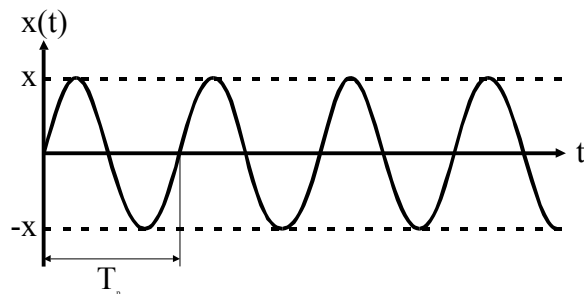
## KLASIFIKACIJA MERNIH SIGNALA (PROCESA)



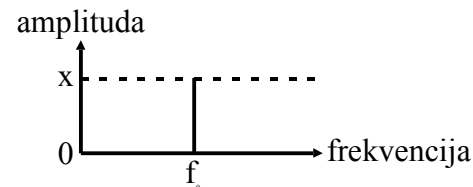
## DETEREMINISTIČKI:

Sinusni:

$$x(t) = X \sin(2\pi \cdot f_0 t + \theta)$$



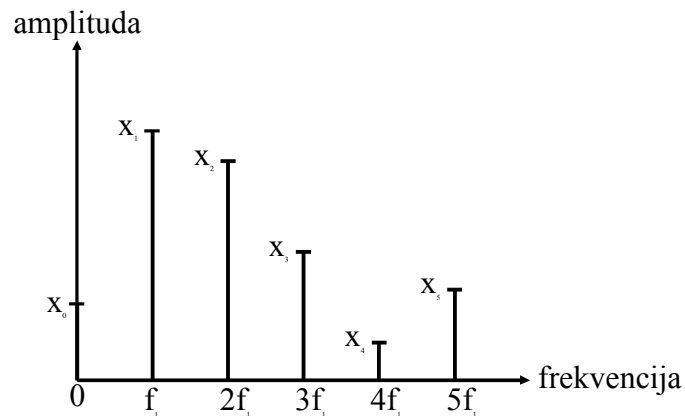
Domen vremena



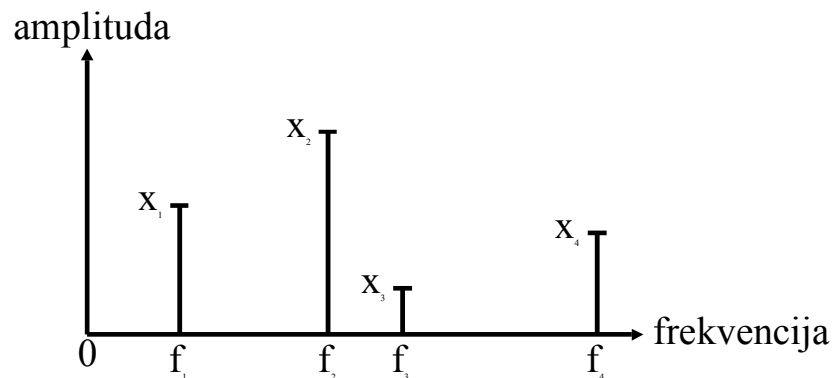
Domen frekvencije

Kompleksno periodični:

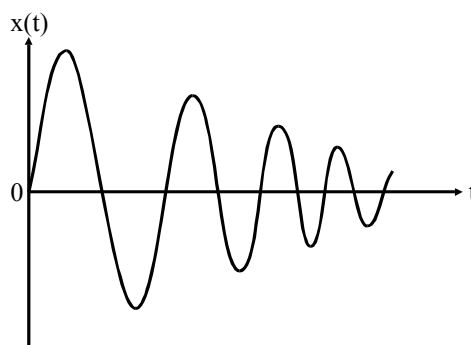
$$x(t) = X(t \pm nT_p), n = 1, 2, 3, \dots$$



Blisko periodični:



Tranzijenti:



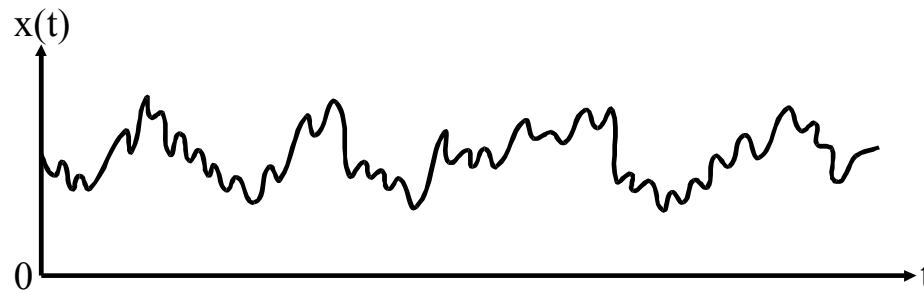
Domen vremena



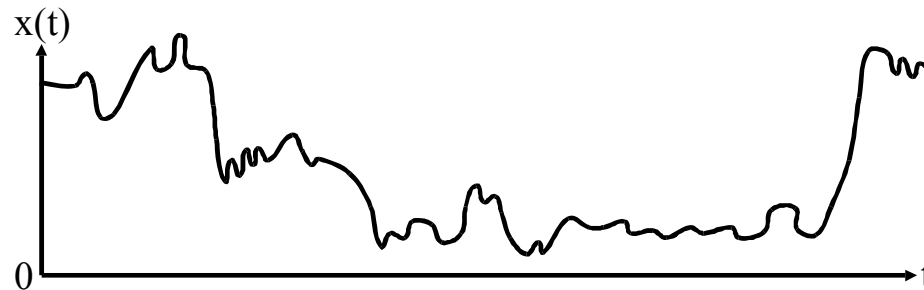
Domen frekvencije

## STOHAŠTIČNI SIGNALI: (opisuju se statistikom)

Stacionarni:



Nestacionarni:



## STATISTIČKI PARAMETRI:

- *Srednja kvadratna vrednost*
- *Distribucija frekvencija*
- 3. *Autokoleracijska funkcija*
- 4. *Spektralna gustoća*



## SREDNJA KVADRATNA VREDNOST

$$\psi_x^2 = \lim \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

Daje informaciju o intenzitetu (energiji) signala

$$\mu_x = \lim \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

Srednja vrednost

$$\sigma_x^2 = \lim \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \mu_x]^2 dt$$

Standardno odstupanje

$$\sigma_x = \sqrt{\psi_x^2 - \mu_x^2}$$

Varijansa

## DISTRIBUCIJA (RASPODELA) AMPLITUDE

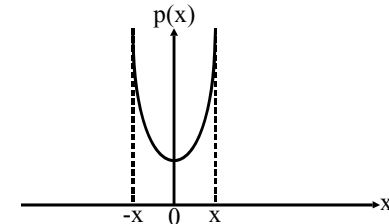
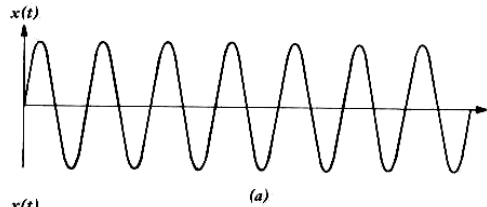
$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

$$\psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx$$

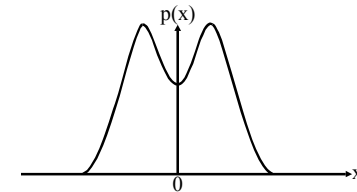
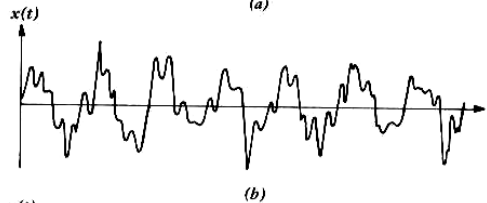
Vremenski signal

Raspodela

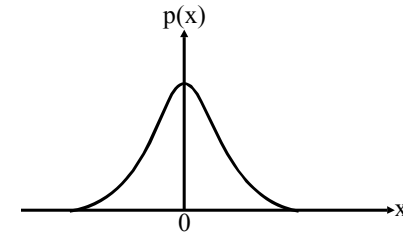
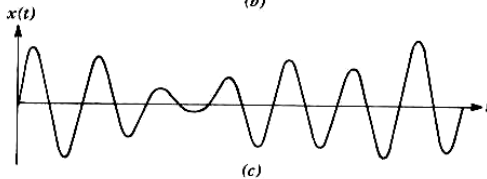
sinus



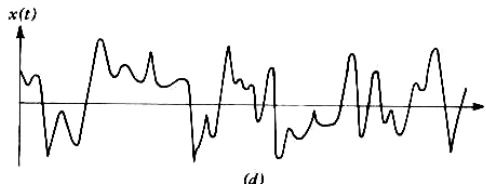
Sinus + šum



Uskopojasni šum



Širokopojasni šum

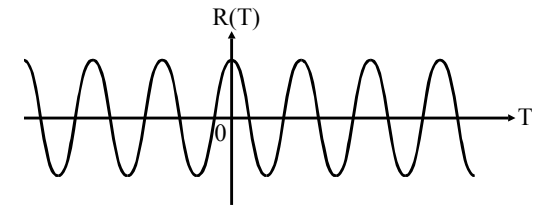
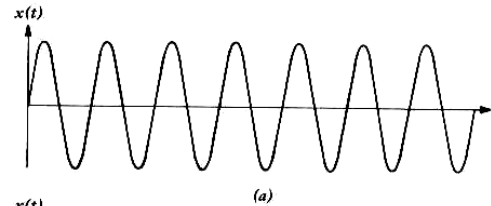


AUTOKORELACIJSKA FUNKCIJA  $R_x(T) = \lim \frac{1}{T} \int_0^t x(t) \cdot x(t + \tau) dt$

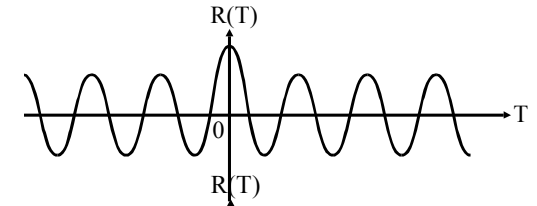
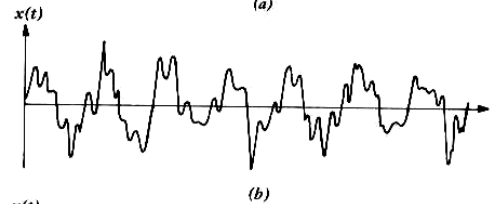
Vremenski signal

Autokorelacijska funkcija

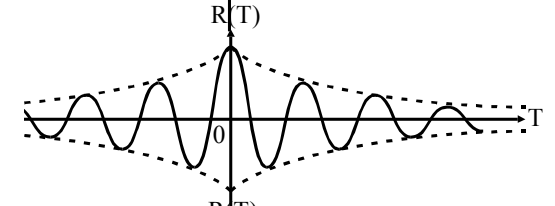
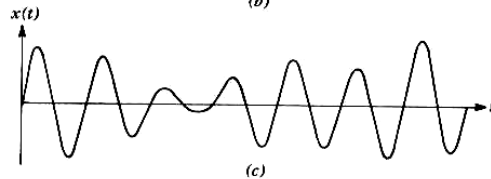
sinus



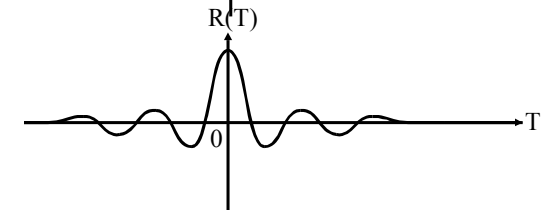
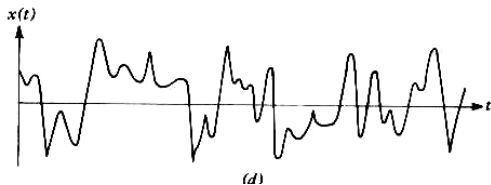
Sinus + šum



Uskopojasni šum



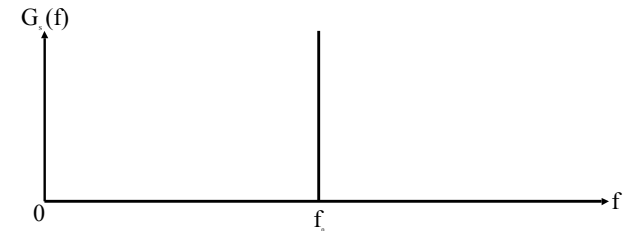
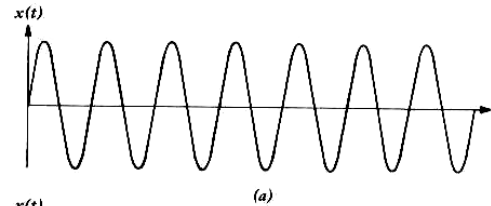
Širokopojasni šum



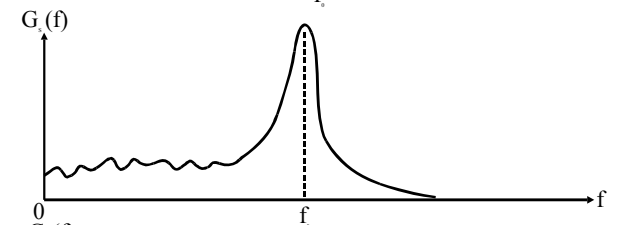
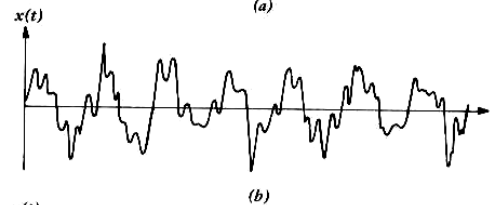
SPEKTRALNA GUSTOĆA  $G_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\psi_x^2(f, \Delta f)}{\Delta f} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta f)} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \right]$

Opisuje frekventni sadržaj signala

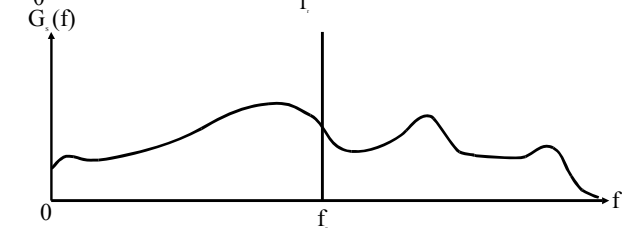
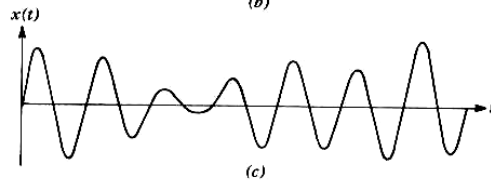
Sinus



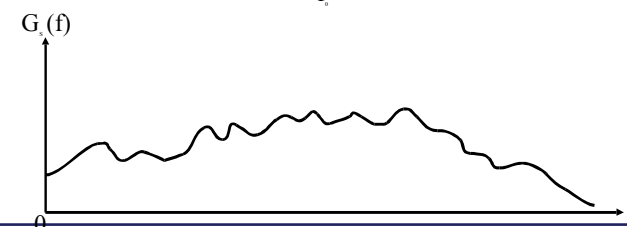
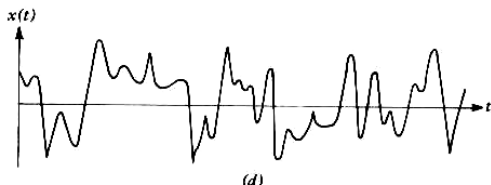
Uskopojasni šum



Sinus + šum



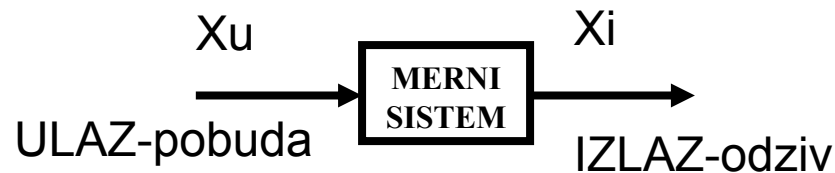
Širokopojasni šum



## PRENOSNE KARAKTERISTIKE MERNOG SISTEMA

### Prenosna funkcija

Definiše odnos izlazne i ulazne veličine

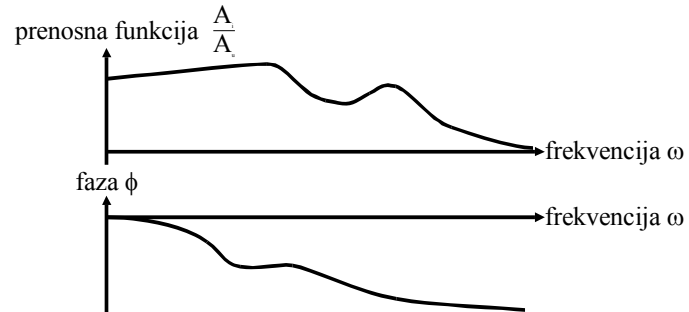
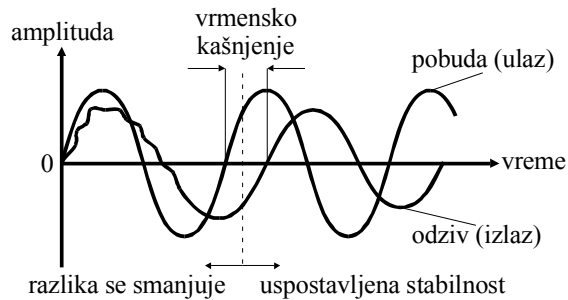


Određuje se snimanjem odziva na definisanu pobudu.  
Pobuda se najčešće koristi kao:

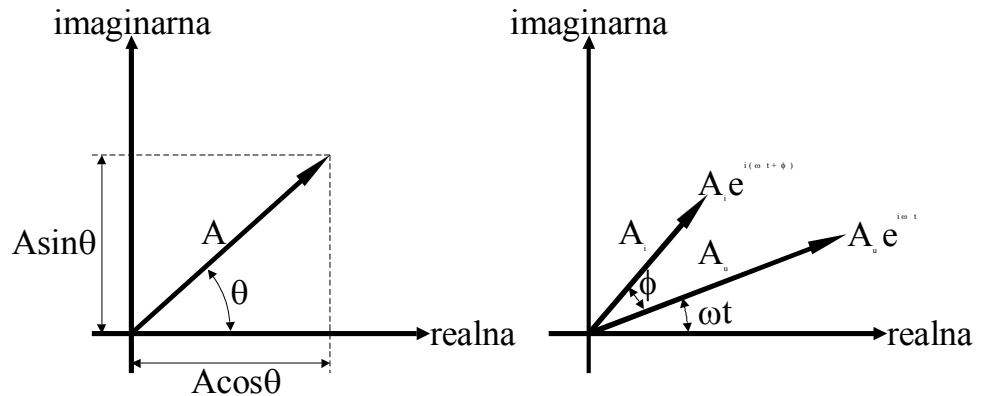
- Sinusna pobuda
- Impulsna pobuda
- Stohastička pobuda

## Frekventni odziv (odziv sistema na sinusnu pobudu)

$$\frac{x_i}{x_u}(j\omega) = G(j\omega) = \frac{A_i e^{j(\omega t + \phi)}}{A_u e^{j\omega t}} = \frac{A_i}{A_u} e^{j\phi}$$

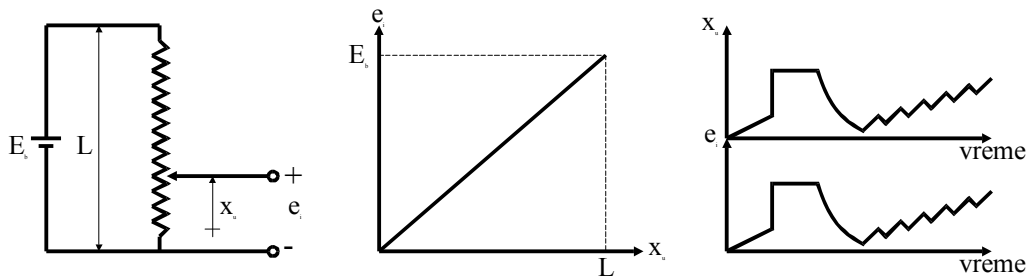


### Prikaz u kompleksnoj ravni



## SISTEM NULTOG REDA

$$x_i = \frac{b_0}{a_0} x_u = K \cdot x_u, K = \frac{b_0}{a_0}$$

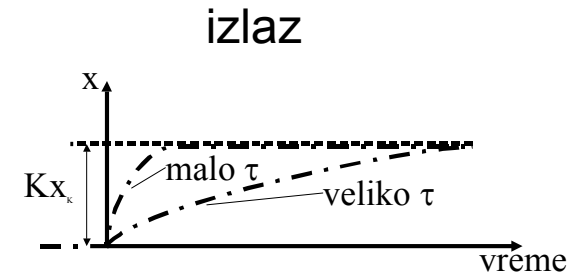
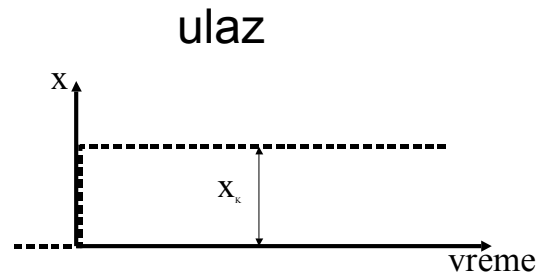
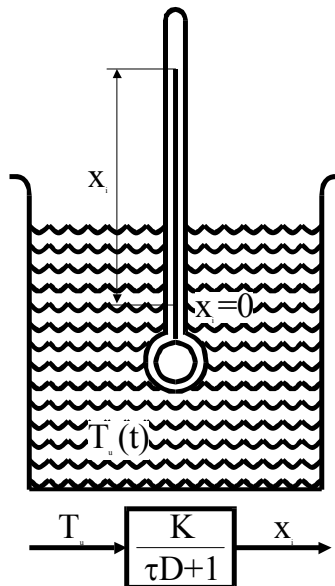


Postoji linarna veza između izlazne i ulazne veličine

## SISTEM PRVOG REDA

$$\frac{x_i}{x_u}(D) = \frac{K}{\tau D + 1}$$

Jednačina prenosne funkcije u operatorskom obliku ( $D = d./dt$ )



Merenje temperature



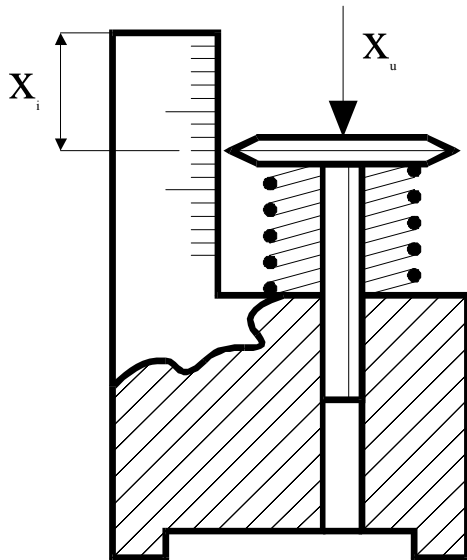
## SISTEM DRUGOG REDA

$$a_2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} + a_1 \frac{dx_i}{dt} + a_0 x_i = b_0 x_u$$

$$K = \frac{b_0}{a_0} \quad - \text{statička osetljivost}$$

$$\omega_n = \frac{a_0}{a_2} \quad - \text{neprigušena (sopstvena) frekvenca}$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \quad - \text{prigušenje}$$



Prenosna funkcija

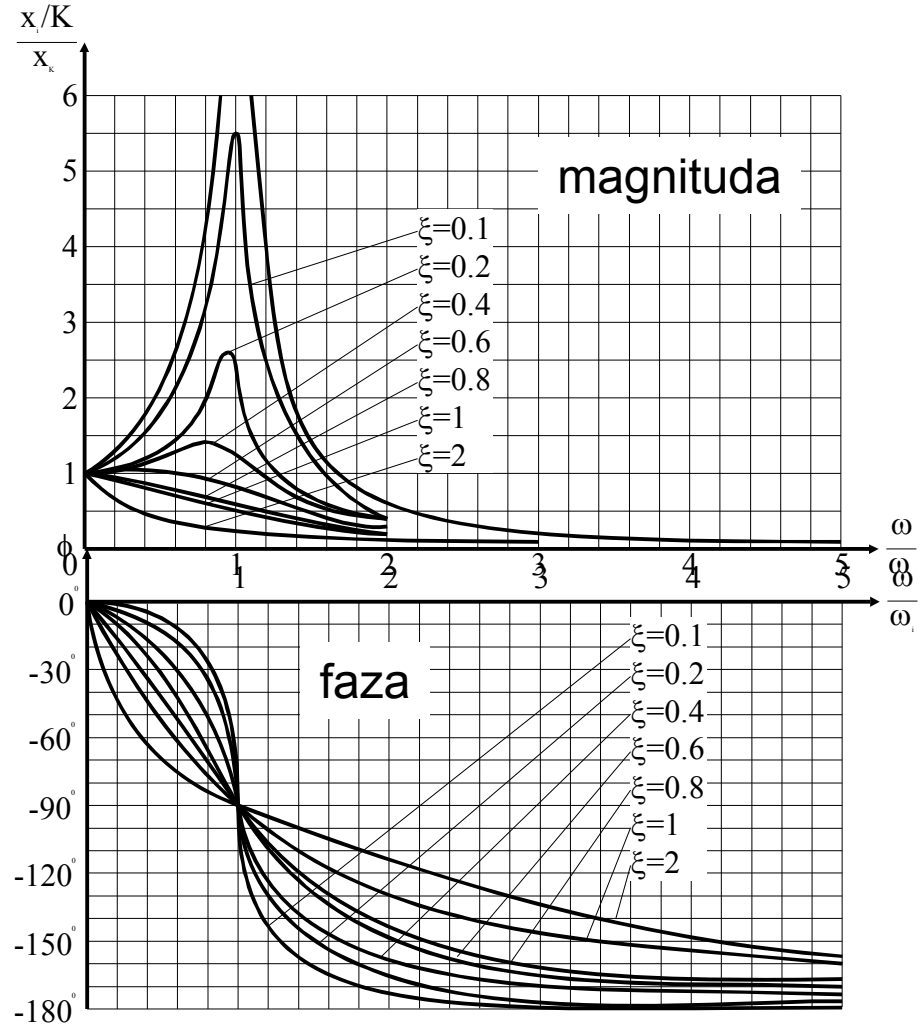
$$\frac{x_i}{x_u}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi D}{\omega_n} + 1}$$

# Frekventni odziv sistema drugog reda

## BODE-ov dijagram

$$\frac{\frac{x_i}{K}}{x_u}(j\omega) = \frac{1^D}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\xi}{\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}}$$



# MERENJE MEHANIČKIH VELIČINA

HVALA...

... NA PAŽNJI



measurement with confidence